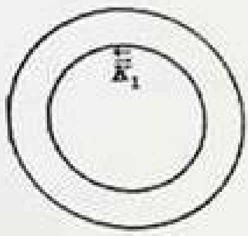
**Física II A/B. Examen 8/8/2018. Tema 1**

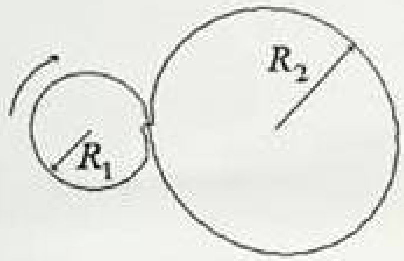
**Nombre y Apellido:**

1) Una esfera de radio $a$ y un cascarón esférico concéntrico, de radios $b$ y $c$, están hechos con un material aislante de $\varepsilon_r$=2. El espacio entre la esfera y el cascarón es vacío. Un aparato no ilustrado carga uniformemente en volumen a la esfera con carga positiva $Q$. Al mismo tiempo carga uniformemente en volumen al cascarón con carga $-Q$. Determinar:
a) El campo eléctrico en la región $0<r<c$
b) La diferencia de potencial $V(0)$-$V(c)$ en función de $Q$, los radios y $\varepsilon_r$ .
c) Las densidades superficiales de carga de polarización en función de las mismas cantidades


2) Dos tubos metálicos cilíndricos, colineales, muy delgados y de radios $a$ y $b$ transportan sendas densidades de corriente $\vec{K}_1$ (interior) y $\vec{K}_2$ (exterior) que apuntan en la dirección del versor angular. En el eje del conjunto ($r$=0) se verifica que $\vec{B} = \vec{0}$ . Determinar:
a) La relación entre $K_1$ y $K_2$ (en módulo y dirección).
b) El campo **B** en $r$=$(a+b)/2$
c) El valor de $K_2$ para obtener en $r$=0 un valor de **B** doble del que se obtendría si estuviera presente $K_1$ solamente

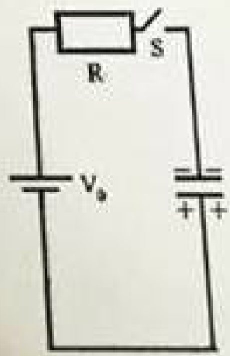



3) La figura muestra un "8", de radios $R_1$ y $R_2$ hecho con un alambre (no hay contacto en el punto de cruce). El conjunto está en el plano del papel ($xy$) e inmerso en un campo magnético $\vec{B} = \left(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}\right)(t/\tau)$, las constantes $B_m$ ($m$=$x,y,z$) son positivas y $\tau$ es una constante con dimensiones de tiempo.
Determinar:
a)La fem inducida en un camino cerrado recorrido en la dirección que marca la flecha
b)La dirección de la corriente inducida

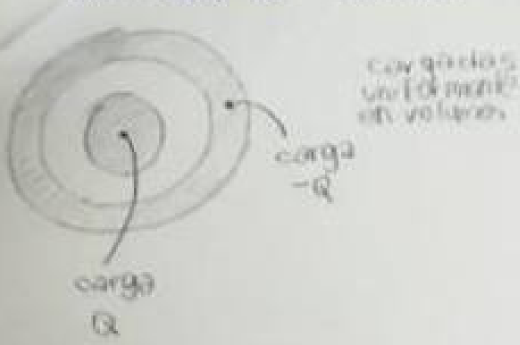



4) **Física II A.** Un cilindro con un pistón móvil contiene $n$ moles de gas diatómico ideal a presión $p_0$ y volumen $V_0$. El gas es comprimido isotérmicamente a la mitad del volumen inicial y luego absorbe una cantidad de calor $Q$ a volumen constante. Luego realiza una expansión adiabática hasta retornar a la condición inicial. Todos los procesos son reversibles. Determinar:
a) La cantidad de calor $Q$ absorbida por el gas
b) La variación de entropía $\Delta S$ de dicho gas durante las dos primeras evoluciones

4) **Física II B.** El capacitor $C$ de la figura tiene una carga inicial $Q_0$ con la polaridad indicada. La carga inicial cumple $Q_0$=$CV_0$. En el instante $t$=0 se cierra la llave $S_1$ Determinar:
a) La diferencia de potencial $V_c(t)$ entre placas del capacitor tomando como referencia la placa inferior.
b) La energía disipada $\mathcal{E}(t)$ en la resistencia.



era radio a   cascarón radios b y c




a) Determinar campo eléctrico para $0 < r < c$

- Para determinar el campo eléctrico voy a usar la ley de Gauss generalizada

$$\boxed{\oint_S \bar{D}\, d\bar{S} = Q_L(S)}$$

- donde $Q_L$ es la carga libre encerrada por la superficie S
- donde 'S' será mi superficie Gaussiana (voy a proponer esferas de distinto radio para que sean paralelas al campo en todo punto)

El campo de la esfera y del cascarón

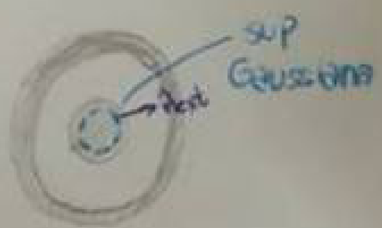
→ tiene simetría rotacional (no depende de $\varphi$)

→ tiene simetría azimutal (no depende de $\theta$)

Por lo tanto, nuestro campo a buscar por ley de Gauss se expresa

$$\boxed{\bar{D} = D(r)\ \hat{r}}$$

① $0 < r < a$




$$\oint_S \bar{D}\, d\bar{S} = Q_L(S)$$

$$\oint_S D(r)\underbrace{\hat{r}\,\hat{r}}_{1}\, dS = Q_L(S)$$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \underbrace{r^2 \operatorname{sen}\theta}_{\text{jacob}}\, D(r)\, d\varphi\, d\theta = Q_L(S)$$

$$D(r)\cdot r^2 \cdot 4\pi = \overbrace{\iiint_V dV}^{\text{volumen esfera gaussiana}} \cdot \rho_1$$

$$D(r)\, r^2\, \cancel{4\pi} = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho_1$$

$$\boxed{D(r) = \rho \cdot r}$$

$< r < a$

$\boxed{D(r) = \rho_1 \cdot r}$

aún no conozco $\rho_1$, pero lo puedo despejar sabiendo que

$$\rho_1 = \frac{Q_{esfera}}{V_{esfera}} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi \cdot a^3}$$

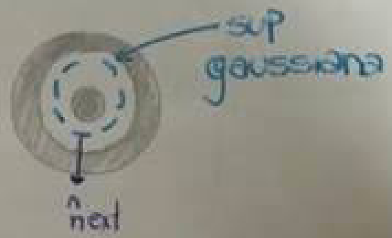
Por lo tanto

$$D(r) = \rho_1 \cdot r = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi\, a^3} \cdot r$$

sabiendo que $\bar{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \cdot \bar{E}$ con $\varepsilon_r = 2$

$$\boxed{\bar{E}(r) = \frac{Q}{\varepsilon_0 \cdot 2} \frac{r}{\frac{4}{3}\pi \cdot a^3} \check{r}} \quad \forall \; 0 < r < a$$

② $a < r < b$




$$\oiint_S \bar{D}\, d\bar{S} = Q_L(S)$$

es igual desarrollo al anterior

ahora, encierro a TODA la esfera

$$D(r) \cdot r^2 \cdot 4\pi = Q$$

$$D(r) = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

sabiendo que $\bar{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \cdot E$ con $\varepsilon_r = 1$ (aire)

$$\boxed{\bar{E}(r) = \frac{Q}{\varepsilon_0\, 4\pi r^2} \check{r}} \quad \forall \; a < r < b$$

③ $b < r < c$


$$\oiint \bar{D}\, d\bar{S} = Q_L(S)$$

es igual al desarrollo anterior

ahora, encierro a TODA la esfera y parte del cascarón

$$D(r) \cdot r^2 \cdot 4\pi = Q + Q_{enc_{cascarón}}$$

$$Q_{enc\ cascaron} = \int_b^r \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \rho_2 r^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\varphi \, dr$$

$$Q_{enc\ cascaron} = \int_b^r \rho_2 \cdot 4\pi \cdot r^2 \, dr$$

$$Q_{enc\ cascarón} = \rho_2 \cdot 4\pi \cdot \frac{r^3}{3} \Big|_{r=b}^{r=r}$$

$$\boxed{Q_{enc\ cascarón} = \rho_2 \cdot \frac{4\pi}{3} (r^3 - b^3)}$$

Ahora averigua $\rho_2$

$$\rho_2 = \frac{Q_{cascarón}}{V_{cascaron}} = \frac{-Q}{\int_b^c \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\varphi \, dr}$$

$$\boxed{\rho_2 = \frac{-Q}{\frac{4\pi}{3}(c^3 - b^3)}}$$

$$\boxed{Q_{enc\ cascarón} = \frac{-Q}{\frac{4\pi}{3}(c^3 - b^3)} \cdot \frac{4\pi}{3}(r^3 - b^3) = -Q \frac{(r^3 - b^3)}{(c^3 - b^3)}}$$

$$\Rightarrow D(r) \cdot r^2 \cdot 4\pi = Q + Q_{enc\ cascarón}$$

$$D(r) \cdot r^2 \cdot 4\pi = Q - \frac{Q(r^3 - b^3)}{(c^3 - b^3)}$$

con $\bar{D} = \bar{E} \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$ con $\varepsilon_r = 2$

$$\boxed{\bar{E}(r) = \frac{Q}{\varepsilon_0 \cdot 2 \cdot r^2 \cdot 4\pi} \left(1 - \frac{r^3 - b^3}{c^3 - b^3}\right) \check{r}}$$

$\forall \; b < r < c$

$$
\vec{E}(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{2\epsilon_0} \dfrac{r}{\frac{4}{3}\pi \cdot a^3}\, \check{r} & (0 < r < a) \\[2ex] \dfrac{Q}{\epsilon_0 4\pi r^2}\, \check{r} & (a < r < b) \\[2ex] \dfrac{Q}{2\epsilon_0 r^2 4\pi}\left(1 - \dfrac{r^3 - b^3}{c^3 - b^3}\right) \check{r} & (b < r < c) \end{cases}
$$

b) Calcular diferencia de potencial $V(0) - V(c)$

$$\Delta V = \int_{\bar{r}_0}^{\bar{r}_f} \bar{E}\, d\bar{l}$$

$$V(0) - V(c) = \int_0^c E\, \underbrace{\hat{r}\ \hat{r}}_{1}\, dr$$

$$V(0) - V(c) = \left[ \int_0^a E\, dr + \int_a^b E\, dr + \int_b^c E\, dr \right]$$

$$V(0) - V(c) = \underbrace{\int_0^a \frac{Q\, r}{2\epsilon_0 \frac{4}{3}\pi a^3}\, dr}_{1} + \underbrace{\int_a^b \frac{Q}{\epsilon_0 4\pi r^2}\, dr}_{2} + \underbrace{\int_b^c E\, dr}_{3}$$

$$1\ \int_0^a \underbrace{\frac{Q}{2\epsilon_0 \frac{4}{3}\pi a^3}}_{cte} \cdot r = \frac{Q}{2\epsilon_0 \frac{4}{3}\pi a^3} \cdot \frac{r^2}{2}\Bigg|_0^a = \frac{Q}{2\epsilon_0 \frac{4}{3}\pi a^3} \cdot \frac{a^2}{2}$$

$$\boxed{1 = \frac{Q}{\frac{8}{3}\epsilon_0 \pi a}}$$

$$\int_a \underbrace{\frac{Q}{\epsilon_0 4\pi}}_{cte} \cdot \frac{1}{r^2}\, dr = \frac{Q}{\epsilon_0 4\pi} \frac{(-1)}{r}$$

$$\boxed{② = -\frac{Q}{\epsilon_0 4\pi r}}$$

$$③ \int_b^c E\, dr = \int_b^c \frac{Q}{2\epsilon_0 r^2 4\pi}\left(1 - \frac{r^3 - b^3}{c^3 - b^3}\right) dr$$

$$③ \frac{Q}{8\pi\epsilon_0}\left(\int_b^c \frac{1}{r^2} - \frac{r^3 - b^3}{r^2 (c^3 - b^3)}\, dr\right)$$

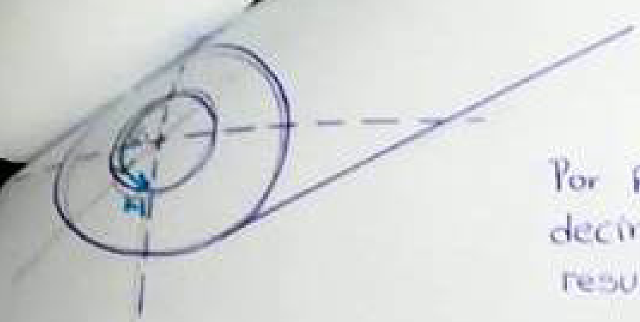
$$③ \frac{Q}{8\pi\epsilon_0}\left(\int_b^c \frac{1}{r^2}\, dr - \int_b^c \frac{r}{c^3 - b^3} + \int_b^c \frac{b^3}{r^2 (c^3 - b^3)}\right)$$

$$③ \frac{Q}{8\pi\epsilon_0}\left(\frac{-1}{r}\Big|_b^c - \left(\frac{r^2}{2(c^3 - b^3)}\right)\Big|_b^c + \frac{-b^3}{r(c^3 - b^3)}\Big|_b^c\right)$$

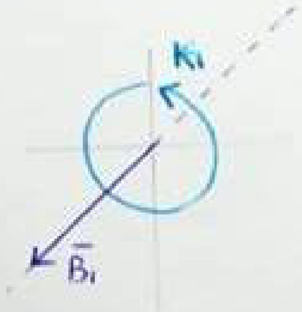
$$③ = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0}\left(\frac{-1}{c} + \frac{1}{b} - \frac{c^2}{2(c^3 - b^3)} + \frac{b^2}{2(c^3 - b^3)} - \frac{b^3}{c(c^3 - b^3)} + \frac{b^3}{b(c^3 - b^3)}\right)$$

$$\boxed{\Delta V = ① + ② + ③}$$

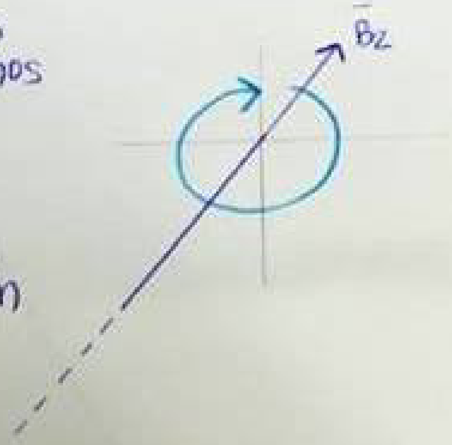
(es muy largo de escribir todo junto)



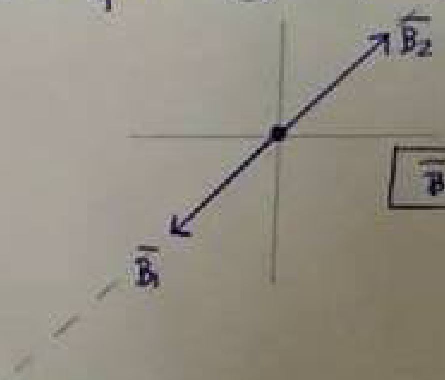
Por Regla de la mano derecha, podemos decir que la corriente generada por $K_1$ resulta corresponder con un campo $B_1$ así:




Entonces, a priori, para que el campo en el eje del tubo sea nulo, ya podemos concluir que $K_2$ debe tener sentido opuesto




para que luego, por superposición




$$\boxed{\bar{B}_1 + \bar{B}_2 = 0}$$

Entonces busquemos ahora una relación entre $K_1$ y $K_2$, para ello, voy a obtener las expresiones de los campos generados por ellas y luego los igualaré.

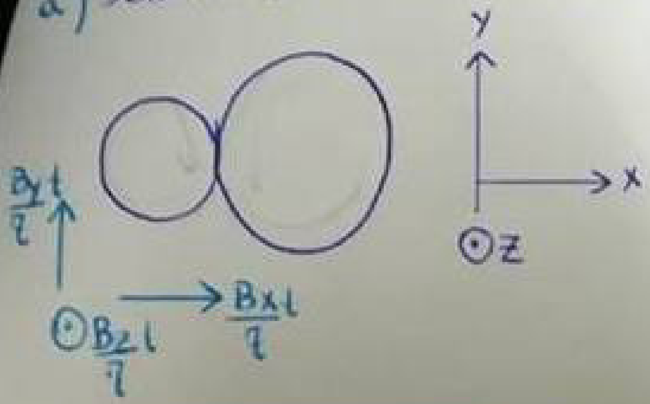
DEBERÍA JUSTIFICAR EL USO DE AMPERE EN ESTE CASO.

Voy a usar la Ley de Biot Savart

está inmerso en un campo $\bar{B} = \left(\frac{B_x \cdot t}{\tau}, \frac{B_y \cdot t}{\tau}, \frac{B_z\, t}{\tau}\right)$

donde $B_x$, $B_y$, $B_z$ y $\tau$ son CONSTANTES

a) Determinar la FEM inducida



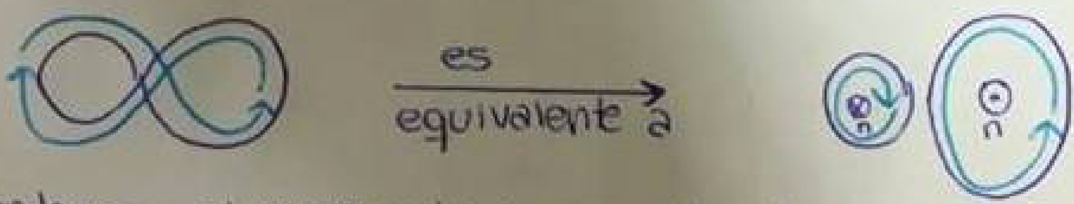

Para calcular la FEM voy a utilizar

$$\boxed{FEM = -\frac{d\Phi}{dt}}$$

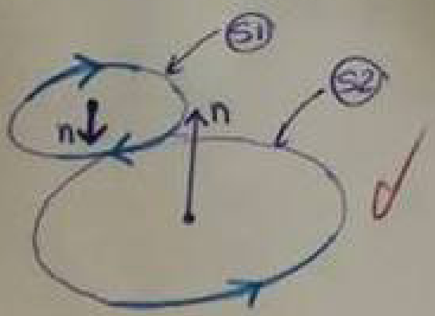
Entonces en primer lugar calculo el flujo

$$\boxed{\Phi = \oiint_S \bar{B}\, d\bar{S}}$$

Ahora, bien, podríamos decir que estamos recorriendo dos caminos que encierran áreas, con atención, se ve que




entonces, al momento de orientar las superficies, vemos que una tiene normal en $\hat{z}$ y otra tiene normal en $-\hat{z}$




Considerando ésto

$$\boxed{\begin{array}{c} d\bar{S}_1 = -\hat{z}\, dS_1 \\ \hline d\bar{S}_2 = \hat{z}\, dS_2 \end{array}}$$

Ahora, calculo el flujo

$$\Phi = \oiint_S \bar{B}\, d\bar{S} = \iint_{S1} \bar{B}\, d\bar{S}_1 + \iint_{S2} \bar{B}\, d\bar{S}_2$$

las calculo por separado

$$\iint_{S_1} \bar{B}\, d\bar{S}_1 = \iint_{S_1} \left( \frac{B_x t}{\tau} \check{x} + \frac{B_y t}{\tau} \check{y} + \frac{B_z}{\tau} (\hat{z}) \right) \cdot -\hat{z}\; dS_1$$

$\hat{x} \cdot \hat{z} = 0$

$\hat{y} \cdot \hat{y} = 0$

$-\hat{z} \cdot \hat{z} = -1$

$$\iint_{S_1} \bar{B}\, d\bar{S}_1 = -\iint_{S_1} \overbrace{\frac{B_z \cdot t}{\tau}}^{\text{no varía en } S_1} dS_1 = -\frac{B_z \cdot t}{\tau} \underbrace{\iint_{S_1} dS_1}_{\text{área de } S_1}$$

$$\boxed{\iint_{S_1} \bar{B} d\bar{S}_1 = -\frac{B_z t}{\tau} A_{S_1} = -\frac{B_z t}{\tau} \pi R_1^2}$$

$$\iint_{S_2} \bar{B}\, d\bar{S}_2 = \iint_{S_2} \left( \frac{B_x t}{\tau} \hat{x} + \frac{B_y t}{\tau} \hat{y} + \frac{B_z t}{\tau} \hat{z} \right) \cdot \hat{z}\, dS_2$$

$\hat{x} \cdot \hat{z} = 0$

$\hat{y} \cdot \hat{z} = 0$

$\hat{z} \cdot \hat{z} = 1$

$$\iint_{S_2} \bar{B} d\bar{S}_2 = \iint_{S_2} \overbrace{\frac{B_z t}{\tau}}^{\text{no varía en } S_2} dS_2 = \frac{B_z t}{\tau} \underbrace{\iint_{S_2} dS_2}_{\text{área de } S_2}$$

$$\boxed{\iint_{S_2} \bar{B} d\bar{S}_2 = \frac{B_z t}{\tau} A_{S_2} = \frac{B_z t}{\tau} \pi \cdot R_2^2}$$

Por lo tanto, entonces

$$\Phi = \oiint_S \bar{B} d\bar{S} = -\frac{B_z \cdot t}{\tau} \pi \cdot R_1^2 + \frac{B_z t}{\tau} \pi \cdot R_2^2$$

$$\boxed{\Phi = \frac{B_z t}{\tau} \pi \left(R_2^2 - R_1^2\right)}$$ Flujo

Vuelvo a la ecuación de FEM

$$\boxed{FEM = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{B_z \pi}{\tau} \left(R_2^2 - R_1^2\right)}$$ ✓

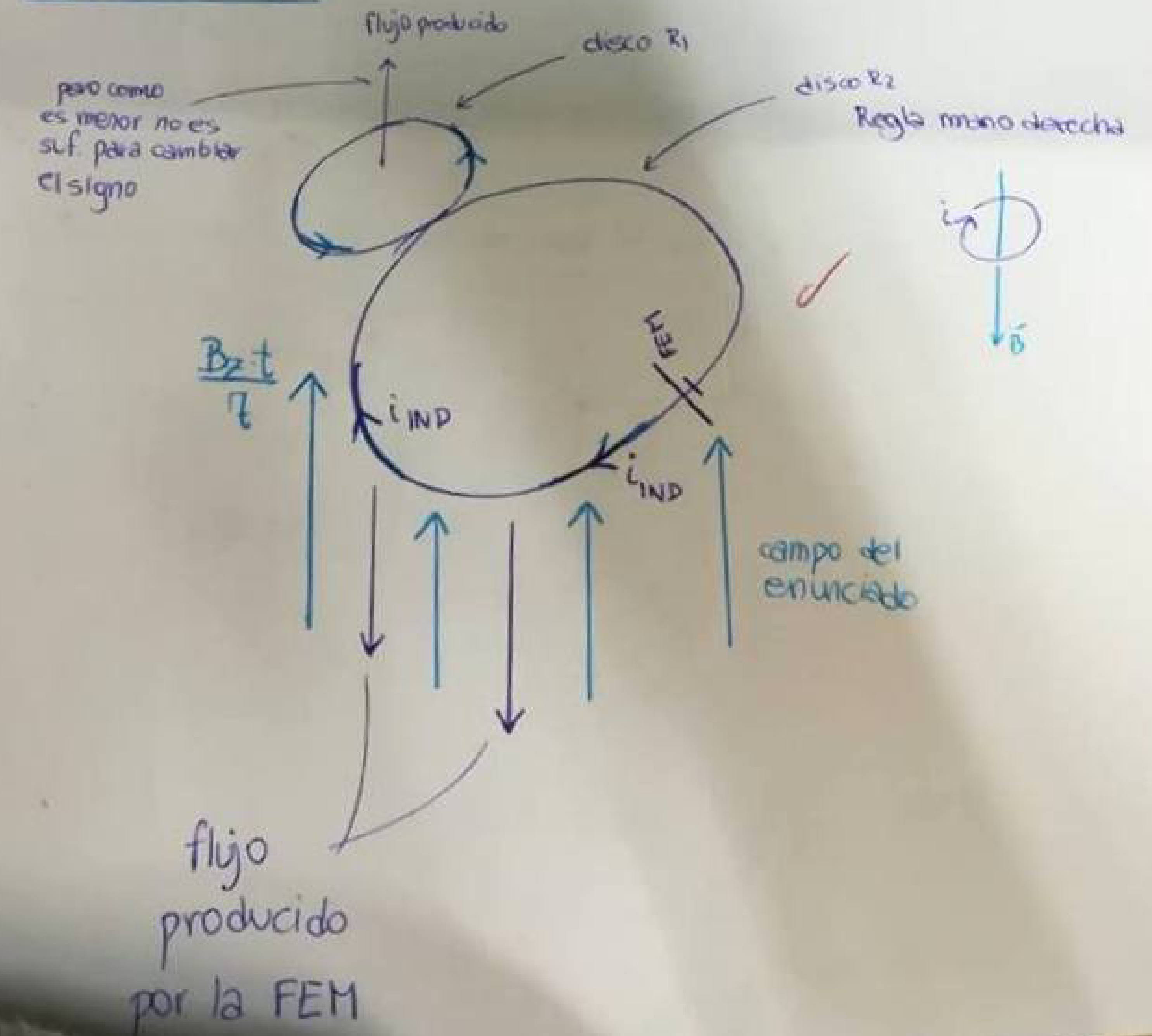
ESTA ES LA FEM INDUCIDA

dirección de la corriente inducida

Es fácil observar viendo la FEM, que su valor es negativo (pues $R_2 > R_1$), esto quiere decir que la FEM busca generar un campo opuesto al presente para contrarrestar el efecto del flujo presente, es decir busca generar un campo en $-\hat{z}$

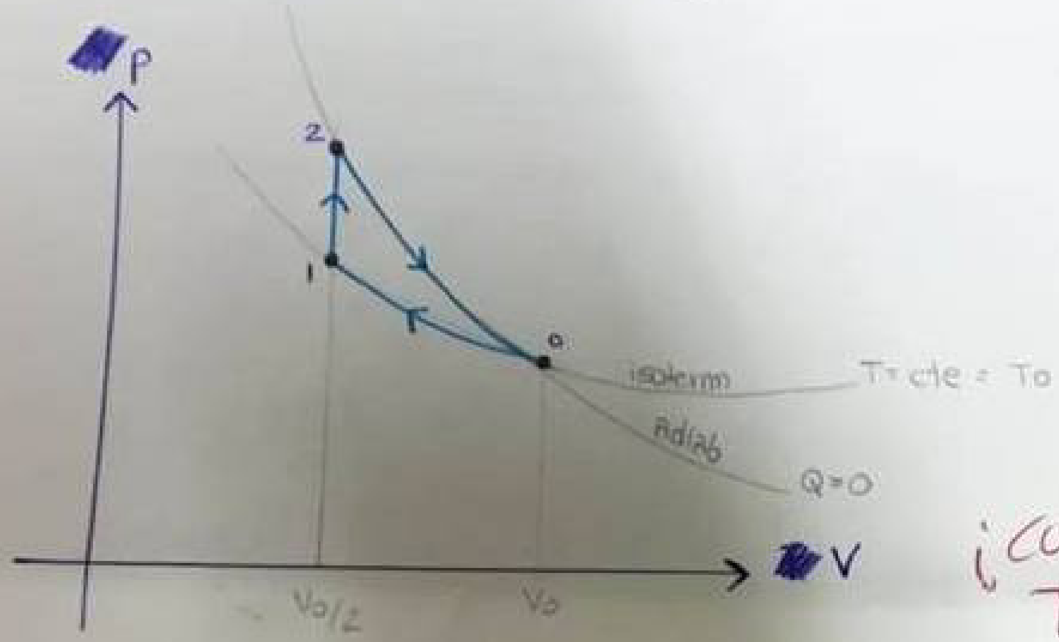
Por regla de la mano derecha (y considerando que $R_2 > R_1$) para obtener un flujo (sumando los de ambas círculos) que resulte negativo, debe producirlo necesariamente en el disco $\Omega_2$, dado que en $\Omega_1$ será menor (y no importará entonces si es opuesto)

## Gráficamente



n moles gas diatomico

$P_0$, $V_0$, $T_0$ $\longrightarrow$ $P_1$, $V_1 = V_0/2$, $T_1 = T_0$ $\longrightarrow$ $P_2$, $V_2 = V_1 = V_0/2$, $T_2$




¿CUÁNTO VALE $T_0$ EN FUNCIÓN DE LOS DATOS?

a) Determinar la cantidad de calor Q absorbida por el gas

$0 \longrightarrow 1$ Proceso isotérmico $\Rightarrow T = cte$ y como U es función U(T) de estado $\Delta U = 0$

$$\Delta U = Q - W = 0 \Rightarrow \boxed{Q = W}$$

Donde

$$W = \int_0^1 P\,dV \quad \text{pero} \quad PV = nRT, \quad P = \frac{nRT}{V}$$

$$W = \int_0^1 \frac{\overbrace{nRT_0}^{cte}}{V}\,dV$$

$$W = nRT_0 \ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right) \quad \text{y como } V_1 = V_0/2$$

$$W = nRT_0 \ln\left(1/2\right)$$

$$\boxed{Q = nRT_0 \ln\left(1/2\right)}$$

cabe destacar que $\ln(1/2) < 0$ por lo tanto $Q < 0$

$\to$ 2 Proceso Isocórico
($V = cte$)

$\Longrightarrow Q = n\,C_v\,\Delta T$

$Q = n \cdot C_v\,(T_2 - T_1)$ [1]

Para conocer $Q_{1\to 2}$ debo conocer $T_2$ entonces me concentro en la expansion adiabática $2 \to 0$

$2 \to 0$ Proceso adiabático $\Longrightarrow Q = 0$

si $P \cdot V^{\gamma} = cte$ $\quad P \cdot V^{\gamma} = cte$

$$P = \frac{nRT}{V}$$

$$\frac{nRT}{V} \cdot V^{\gamma} = cte$$

$$nRT\,V^{\gamma-1} = cte$$

Por lo tanto

$$\cancel{nR}\,T_2\,V_2^{\gamma-1} = \cancel{nR}\,T_0 \cdot V_0^{\gamma-1}$$

$$T_2 = T_0 \cdot \frac{V_0^{\gamma-1}}{V_2^{\gamma-1}} = T_0 \cdot \left(\frac{V_0}{V_2}\right)^{\gamma-1}$$

y $V_2 = V_1 = V_0/2$

$$\boxed{T_2 = T_0 \cdot 2^{\gamma-1}}$$

Vuelvo a la ecuación [1]

$$Q = n\,C_v \cdot (T_2 - T_1)$$

$$Q = n\,C_v\,(T_0 \cdot 2^{\gamma-1} - T_1) \quad T_1 = T_0$$

$$\boxed{Q = n\,C_v \cdot T_0\,(2^{\gamma-1} - 1)}$$

Por ser diatómica

con $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{7}{2} \cdot \frac{2}{5}$

$\boxed{\gamma = 7/5}$

...onces, en resumen

$$Q_{0\to1} = n R T_0 \ln(1/2)$$

$$Q_{1\to2} = n \, C_v^{\,\leftarrow 5/2 R} \, T_0 \left(2^{\gamma-1} - 1\right)$$

$$Q_{2\to0} = 0 \text{ (adiab)}$$

como $Q_{0\to1} < 0$ el único calor absorbido es $Q_{1\to2}$

a) $$\boxed{Q_{1\to2} = n \cdot \frac{5}{2} R T_0 \underbrace{\left(2^{\gamma-1} - 1\right)}_{\text{aprox } 0{,}32}}$$ $T_0$ NO ES DATO

b) La variación de entropía $\Delta S$ en las primeras dos evoluciones

Se trata de procesos reversibles, por lo tanto

¿CAMINO CERRADO?

$$\Delta S = \oint \frac{dQ_{rev}}{T} = \frac{Q_{0\to1}}{T_0} + \int \frac{\delta \, n C_v \Delta T}{T}$$

MEZCLA CLAUSIUS

$$\boxed{\Delta S = \frac{n \cdot R \cancel{T_0} \cdot \ln(1/2)}{\cancel{T_0}} + n \cdot C_v^{\,\leftarrow 5/2 R}}$$ NO

SI UTILIZA EL CONCEPTO DE FUNCIÓN DE ESTADO HUBIERA LLEGADO AL RESULTADO CORRECTO.